№8.3

$N = 256$

$D = 622$ м

$\lambda = 0{,}5$ м

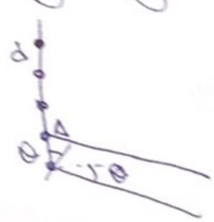
$\delta_1, \delta_2 - ?$

Решение:

$\exists$ параболоиды нах-ся на расстоянии d друг от друга.

1) 

Так как источник света далёк, то будем считать, что волна — плоская и приходит к каждому параболоиду под одним и тем же углом θ.
Если источник смещён на θ от зенита, то волна к i-му приёмн. сдвинута по фазе на $kd\sin\theta$ отн-но $(i-1)$-го приёмника:



$$\Delta = d\sin\theta$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \varphi)}$$

$$\ldots$$

$$\varphi = k\Delta = kd\sin\theta$$

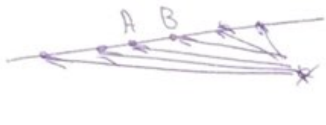
$$\vec{E}_\Sigma = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-in\varphi} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \cdot \frac{1 - e^{-i\varphi\frac{N}{2}}}{1 - e^{-i\varphi}}.$$

$$\frac{1 - e^{-i\varphi\frac{N}{2}}}{1 - e^{-i\varphi}} = \frac{e^{-i\varphi\frac{N}{4}}}{e^{-\frac{i\varphi}{2}}} \cdot \frac{e^{i\varphi\frac{N}{4}} - e^{-i\varphi\frac{N}{4}}}{e^{\frac{i\varphi}{2}} - e^{-\frac{i\varphi}{2}}}$$

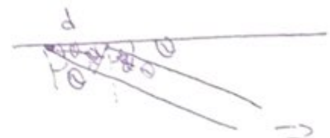
$$e^{i\varphi\frac{N}{4}} - e^{-i\varphi\frac{N}{4}} = 2i\sin\frac{N\varphi}{4}$$

$$e^{\frac{i\varphi}{2}} - e^{-\frac{i\varphi}{2}} = 2i\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Также вклад приносят параболоиды на линии, $\perp$ сечению $\vec{E}_2$



в т. A и B запаздывание одинаковое и равное $e^{-i\frac{N\varphi}{4}}$.



$\Delta' = d\,\cancel{\sin\theta}\,\cancel{\cos\theta}\,\sin\theta$

$\varphi' = kd\,\cancel{\cos\theta}\,\sin\theta$

Т.к. θ - мал $\Rightarrow \vec{E}_A \parallel \vec{E}_B$

$\Rightarrow \vec{E}_A + \vec{E}_B = 2\vec{E}_A = 2\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} e^{-\frac{iN\varphi}{4}}$.

В силу симметрии отн-но сечения так будет со всеми симм. точками.

$$\vec{E}_2 = 2\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} e^{-\frac{iN\varphi}{4}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} e^{-in\varphi'} = 2\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} e^{-\frac{iN\varphi}{4}} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{iN\varphi'}{4}}}{1 - e^{-i\varphi'}}.$$

С теми же преобразованиями получим:

$$\vec{E}_2 = 2\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} e^{-\frac{iN\varphi}{4}} \cdot \frac{e^{-\frac{iN\varphi'}{8}}}{e^{-\frac{i\varphi'}{2}}} \cdot \frac{\sin\frac{N\varphi'}{8}}{\sin\frac{\varphi'}{2}}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \left(\frac{e^{-i\varphi\frac{N}{4}}}{e^{-\frac{i\varphi}{2}}} \cdot \frac{\sin\frac{N\varphi}{4}}{\sin\frac{\varphi}{2}} + 2e^{-\frac{iN\varphi}{4}} \cdot \frac{e^{-\frac{iN\varphi'}{8}}}{e^{-\frac{i\varphi'}{2}}} \cdot \frac{\sin\frac{N\varphi'}{8}}{\sin\frac{\varphi'}{2}} \right)$$

$$I \sim |E|^2 \Rightarrow I \sim \left(\frac{\sin^2\frac{N\varphi}{4}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} + 4\frac{\sin^2\frac{N\varphi'}{8}}{\sin^2\frac{\varphi'}{2}} \right)$$

В окр-ти 0 наибольший вклад ~~в~~ даёт первое отношение синусов

Найдём -1 и +1 минимумы:

$\frac{Nkd\sin\theta}{4} = \pm\pi$, $\sin\theta = \pm\frac{\lambda}{\frac{N}{2}d}$. Т.к. θ - мал, то

$\theta = \pm\frac{\lambda}{\frac{N}{2}d}$, $\frac{N}{2}d \sim D$ (размах креста)

Рассчитаем максимумы:

$$\frac{kd\sin\Theta}{2} = 2\pi m,\quad m\in\mathbb{Z}$$

$\frac{2\pi}{2\lambda} d\sin\Theta = 2\pi m$, $\sin\Theta = 2m\frac{\lambda}{d}$ – отстоят на расс-ии $\frac{2\lambda}{d}$.

Рассчитаем 1 и −1 минимумы:

Т.к. при $\frac{\varphi}{2} \to \pi$ (т.к. $\frac{N}{2}\in\mathbb{Z}$) $\sin\frac{N\varphi}{4}, \sin\frac{\varphi}{2} \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\sin\frac{N\varphi}{4}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \to -\frac{N}{2}$ (если $\frac{N}{2}$ - нечёт), $\frac{N}{2}$ (если $\frac{N}{2}$ - чёт). Т.к. $\frac{N}{2}$ - чёт

$$\frac{Nkd\sin\Theta}{4} = \pm\pi,\quad \frac{N\pi d\sin\Theta}{2\lambda} = \pm\pi,\quad \sin\Theta = \pm\frac{\lambda}{\frac{N}{2}d}$$

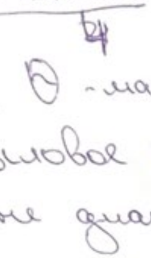
Т.к. Θ - мал, то $\Theta = \pm\frac{\lambda}{\frac{N}{2}d}$.

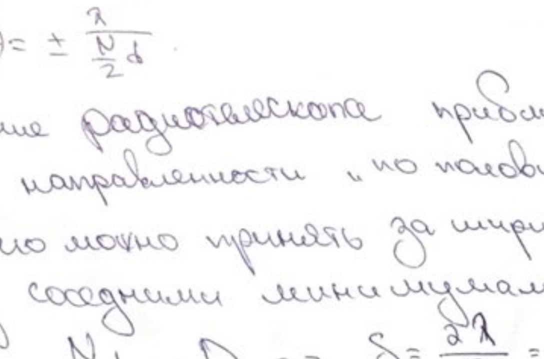
Угловое разрешение радиотелескопа приблизительно равно ширине диаграммы направленности «по половине мощности». Но при малых Θ ее можно принять за ширину максимума, т.е. расстояние м/у соседними минимумами:

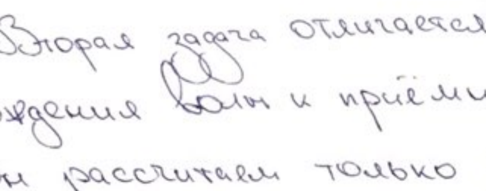
$$\delta_1 = \Theta^+ - \Theta^- = \frac{2\lambda}{\frac{N}{2}d},\quad \frac{N}{2}d \sim D \Rightarrow \delta_1 = \frac{2\lambda}{D} = \frac{2\cdot 0{,}5\,м}{622\,м}\ рад = 0{,}0016\ рад$$

2) Вторая задача отличается от первой разностью фаз прихождения волн к приёмникам. В силу симметричности сторон рассчитаем только для одной стороны.

Перейдём в сечение ABC:







$$\vec{E}_C = \vec{E}_{01} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} e^{-i\varphi}$$

$$\vec{E}_B = \vec{E}_{01} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} e^{-i(\frac{N}{4}-1)\varphi}$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-in\varphi} = \vec{E}_{01} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \frac{e^{-i\frac{N}{4}\varphi}}{e^{-i\frac{\varphi}{2}}} \cdot \frac{\sin\frac{N\varphi}{4}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$\varphi = kd\sin\Theta.$$

Аналогичное проделываем со 2й линией:

$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|$

Т.к. θ – мал, то можно считать, что $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 \approx 2\vec{E}_1$

$J \sim |E|^2 = 4 \dfrac{\sin^2 \frac{N\varphi}{4}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$.

Аналогично найдя минимумы, узнаем, что $\delta_2 = \frac{2\lambda}{D} = 0{,}0016$ рад

Ответ: $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}0016$ рад.